Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos

Francisco Sánchez Sánchez

3o Congreso de Matemáticas y Física
UDLAP
Febrero 2013

La técnica

La técnica

Juegos Cooperativos

Ejemplos

$$\begin{array}{lll} \nu(\{1\}) = 1 & \nu(\{2\}) = 4 & \nu(\{3\}) = 6 \\ \nu(\{1,2\}) = 4 & \nu(\{1,3\}) = 6 & \nu(\{2,3\}) = 6 \\ \nu(\{1,2,3\}) = 6 & & \end{array}$$

Ejemplo.

Supongamos:

Juegos cooperativos

Ejemplos

ahora utilizando la fórmula,

$$\varphi_i(\nu) = 1/n! \sum_{\mathcal{R}} (\nu(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(P_i^{\mathcal{R}}))$$

	$\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$		
$\mathcal{R}$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1 2 3	1	3	2
1 3 2	1	0	5
2 1 3	0	4	2
2 3 1	0	4	2
3 1 2	0	0	6
3 2 1	0	0	6
	2	11	23

de donde

$$\varphi(\nu) = (1/3, 11/6, 23/6)$$

Ejemplo 2

Hay n inversionistas, el i-ésimo con un monto x_i. El banco ofrece tasas de interés cada vez más altas conforme el monto que se invierte es más alto. Así, lo que les conviene a los inversionistas es juntarse para conseguir una tasa más atractiva. El juego lo podemos definir como, $v(S)$ el rendimiento que obtienen los inversionistas en S cuando realizan su inversión conjuntamente. Así, $Sh_i(v)$ es la parte del rendimiento que le toca a i. Supongamos tres inversionistas con montos, 100, 300, 400 (en miles de euros) y las tasas: 5 % si el monto es menor o igual a 150, 6 % si es menor que 250, y 8 % si el monto es mayor o igual que 500. Así,

$$\begin{array}{ccc} v(\{1\}) = 0{,}05(100) & v(\{2\}) = 0{,}06(300) & v(\{3\}) = 0{,}6(400) \\ v(\{1,2\}) = 0{,}06(400) & v(\{1,3\}) = 0{,}08(500) & v(\{2,3\}) = 0{,}08(700) \\ & v(\{1,2,3\}) = 0{,}08(800) & \end{array}$$

Ejemplo 2

$$v(\{1\}) = 5 \qquad v(\{2\}) = 18 \qquad v(\{3\}) = 24$$
$$v(\{1,2\}) = 24 \qquad v(\{1,3\}) = 40 \qquad v(\{2,3\}) = 56$$
$$v(\{1,2,3\}) = 64$$

	$\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$		
$\mathcal{R}$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1 2 3	5	19	40
1 3 2	5	24	35
2 1 3	6	18	40
2 3 1	8	18	38
3 1 2	16	24	24
3 2 1	8	32	24
	$\frac{48}{6} = 8$	$\frac{135}{6} = 22{,}5$	$\frac{201}{6} = 33{,}5$

Juegos y gráficas

Juegos y gráficas

Juegos y gráficas

La distribución de herencias

La distribución de herencias

La distribución de herencias

La distribución de herencias

Indice de Gini

Indice de Gini

Como el índice de Gini es homogenio de grado 1, es decir

$$G(\lambda x) = G(x)$$

nos podemos restringir a

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n_+ | \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Indice de Gini

Indice de Gini

Sean

Cálculo del índice de Gini

Invariante bajo escala

El primer axioma requiere que si el ingreso de todas las personas se escala, el índice no cambia. En particular, el axioma pide que si el ingreso de las personas se mide en otra moneda, el índice no cambie. Es decir,

Simetría

El siguiente axioma requiere que el indice no cambie si se permutan sus coordenadas. Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Dado $\theta \in S_n$, vamos a denotar por θx al vector $(x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(n)})$.

Proporcionalidad en casos extremos

Para poblaciones donde sólo hay dos tipos de personas, los ricos que tienen una unidad de ingreso y los pobres que no tienen ingreso, supondremos que el índice G está en proporción al número de pobres. Esto es, para

$$E^k = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{k}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{n-k})$$

Coordenadas baricéntricas

El indice no se define en 0, se supone que al menos hay un rico. En particular $G(\mathbf{1}) = 0$ y $G(e_n) = 1$.

Puntos extremos de K

Todo punto de K se puede expresar en forma única como una combinación convexa positiva de los puntos:

Teorema

Expresión alternativa para el índice de Gini

Se tiene que,

Teorema

Ejemplo

Referencias